

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG
KHOA KHCB

ĐỀ THI, ĐÁP ÁN/RUBRIC VÀ THANG ĐIỂM
THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
Học kỳ 2, năm học 2023-2024

I. Thông tin chung

Tên học phần:	Toán cao cấp và ứng dụng		
Mã học phần:	71ITMA10104	Số tín chỉ:	4
Mã nhóm lớp học phần:	232_71ITMA10104_01, 02, 03, 04, 05, 06		
Hình thức thi: Tự luận	Thời gian làm bài:	75	phút
<i>Thí sinh được tham khảo tài liệu:</i>	<input checked="" type="checkbox"/> Có	<input type="checkbox"/> Không	

Cách thức nộp bài: SV làm bài trên giấy

II. Các yêu cầu của đề thi nhằm đáp ứng CLO

Ký hiệu CLO	Nội dung CLO	Hình thức đánh giá	Trọng số CLO trong thành phần đánh giá (%)	Câu hỏi thi số	Điểm số tối đa	Lấy dữ liệu đo lường mức đạt PLO/PI
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
CLO 1	Áp dụng kiến thức về hàm số, đạo hàm, đạo hàm riêng, chuỗi số để giải quyết một số bài toán thực tế và bài toán tối ưu.	Tự luận	50%		5	PI 1.1
CLO 2	Áp dụng kiến thức về tích phân để giải quyết một số bài toán thực tế và bài toán tìm diện tích, thể tích.	Tự luận	30%		3	PI 1.1
CLO 3	Áp dụng các kiến thức về đạo hàm, tích phân để giải các phương trình vi phân cấp 1, cấp 2	Tự luận	20%		2	PI 1.1

III. Nội dung câu hỏi thi

Câu hỏi 1: (5 điểm)

a) Hãng nước ngọt X sản xuất vỏ lon nước ngọt bằng chất liệu kim loại có hình dạng khối trụ tròn xoay với dung tích là 0.5 lít. Để tiết kiệm chi phí sản xuất vỏ lon thì hãng nước ngọt X cần thiết kế chiều cao vỏ lon và bán kính đáy như thế nào?

b) Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ tại (1;1) rồi dựa vào đó xấp xỉ $f(0.99; 1.01)$

c) Xét tính hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2023} + 2024}$

d) Tìm giá trị cực đại địa phương, cực tiểu địa phương và điểm yên ngựa của hàm số sau:

$$f(x, y) = x^4 + y^2 - 4xy + 2024$$

Câu hỏi 2: (3 điểm)

a) Đường cong $y = \sqrt{100 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, là một cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 100$. Tìm diện tích của mặt tròn xoay thu được bằng cách quay cung này quanh trục Ox.

b) Tính tích phân kép $\iint_D (x + 2y) dA$, biết D bị chặn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = x^2$

Câu hỏi 3: (2 điểm)

Giải các phương trình vi phân:

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2024}{y^2}$

b. $y'' + y' - 2y = 2024.$

..... **hết**

ĐÁP ÁP VÀ THANG ĐIỂM

Phần câu hỏi	Nội dung đáp án	Thang điểm	Ghi chú
I. Tự luận			
Câu 1		5.0	
a) Hãng nước ngọt X sản xuất vỏ lon nước ngọt bằng chất liệu kim loại có hình dạng khối trụ tròn xoay với dung tích là 0.5 lít. Để tiết kiệm chi phí sản xuất vỏ lon thì hãng nước ngọt X cần thiết kế chiều cao vỏ lon và bán kính đáy như thế nào?	Giả sử lon hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h (đơn vị: cm) Để giảm tối thiểu chi phí kim loại dùng khi sản xuất, ta cần cực tiểu hóa diện tích bề mặt của hình trụ (gồm mặt trên, mặt dưới và mặt xung quanh).	0.25	
	Diện tích bề mặt là: $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	0.25	
	Theo giả thuyết, lon hình trụ có dung tích 0.5 lít: $\pi r^2 h = 500 \text{ (cm}^3\text{)}$ hay $h = \frac{500}{\pi r^2}$ Vậy $A = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{500}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$	0.25	
	$A'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 250)}{r^2}$ $A'(r) = 0 \Leftrightarrow \pi r^3 = 250 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$	0.25	
	Lập bảng biến thiên suy ra A đạt giá trị cực tiểu tuyệt đối tại $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$. Khi đó: $h = \frac{500}{\pi r^2} = \frac{500}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{250}{\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$	0.25	
Vậy, để giảm tối thiểu chi phí sản xuất cái lon, bán kính lon là $\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ (cm) và chiều	0.25		

	cao lon bằng $2\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ (cm)		
b) Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x,y) = \sqrt{6-x^2-y^2}$ tại (1;1) rồi dựa vào đó xấp xỉ $f(0.99;1.01)$	$f_x = -\frac{x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}; f_y = -\frac{y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$	0.25	
	$f_x(1;1) = f_y(1;1) = -\frac{1}{2}$	0.25	
	Hàm tuyến tính hóa tại (1;1) là: $L(x;y) = 2 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1)$ $= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$	0.25	
	Xấp xỉ tuyến tính: $f(x;y) \approx -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$ $\Rightarrow f(0.99;1.01) \approx 2$	0.25	
c) Xét tính hội tụ của chuỗi số sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2023} + 2024}$	Xét $a_n = \frac{1}{n^{2023} + 2024}; b_n = \frac{1}{n^{2023}}$	0.25	
	Ta thấy: $0 < a_n < b_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$	0.25	
	Hơn nữa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2023}}$ là p-chuỗi có $p > 1$ nên hội tụ.	0.25	
	Theo tiêu chuẩn so sánh thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2023} + 2024}$ cũng hội tụ.	0.25	
d) Tìm giá trị cực đại địa phương, cực tiểu địa phương và điểm yên ngựa của hàm số sau. $f(x,y) = x^4 + y^2 - 4xy + 2024$	$f_x = 4x^3 - 4y \quad f_y = 2y - 4x$	0.25	
	$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y = 2x \end{cases}$ $\Leftrightarrow (x;y) = (0;0), (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$	0.25	
	$f_{xx} = 12x^2 \quad f_{xy} = -4 \quad f_{yy} = 2$ $D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = 24x^2 - 16$	0.25	
	$D(0,0) = -16 < 0 \rightarrow f$ không có cực đại và cực tiểu địa phương tại (0,0) và (0,0) là một điểm yên ngựa.	0.25	

	$D(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 32 > 0, f_{xx}(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) = 24 > 0$ $\Rightarrow f(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) = 2020$ là giá trị cực tiểu địa phương của f	0.25	
	$D(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 32 > 0$ $, f_{xx}(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = 24 > 0$ $\Rightarrow f(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2}) = 2020$ là giá trị cực tiểu địa phương của f	0.25	
Câu 2		3.0	
a) Đường cong $y = \sqrt{100 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$, là một cung của đường tròn $x^2 + y^2 = 100$. Tìm diện tích của mặt tròn xoay thu được bằng cách quay cung này quanh trục Ox.	$f(x) = \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$	0.25	
	Diện tích của mặt tròn xoay: $S = \int_{-1}^1 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$	0.25	
	$= \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{100 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}\right)^2} dx$	0.25	
	$= \int_{-1}^1 2\pi \sqrt{100 - x^2} \sqrt{\frac{100}{100 - x^2}} dx$	0.25	
	$= \int_{-1}^1 20\pi dx$	0.25	
	$= 40\pi$ (đvdt)	0.25	
b) Tính tích phân kép $\iint_D (x + 2y) dA$, biết D bị chặn bởi đồ thị các hàm số $y = x$ và $y = x^2$	Phương trình hoành độ giao điểm: $x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$	0.25	
	Miền D có biểu diễn: $D = \{(x; y) / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$	0.25	
	$\Rightarrow \iint_D (x + 2y) dA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x + 2y) dy \right) dx$	0.25	
	$= \int_0^1 (xy + y^2) \Big _{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx$	0.25	
	$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big _0^1$	0.25	

	$= \frac{13}{60}$	0.25	
Câu 3		2.0	
Giải các phương trình vi phân:	$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2024}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = (x+2024) dx$	0.25	
a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2024}{y^2}$	$\Rightarrow \int y^2 dy = \int (x+2024) dx$	0.25	
	$\Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + 2024x + C$	0.25	
	$\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} x^2 + 6072x + K} \quad (K = 3C \in \mathbb{R})$	0.25	
b. $y'' + y' - 2y = 2024$.	Xét phương trình đặc trưng: $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -2 \end{cases}$	0.25	
	Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất: $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$	0.25	
	Nghiệm riêng có dạng: $y_p = A \Rightarrow y_p' = y_p'' = 0$		
	Thay vào phương trình ban đầu ta được: $-2A = 2024 \Rightarrow A = -1012$ $\Rightarrow y_p = -1012$	0.25	
	Nghiệm cần tìm: $y = y_c + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 1012$	0.25	
	Điểm tổng	10.0	

Người duyệt đề



Đinh Tiên Liêm

TP. Hồ Chí Minh, ngày 25 tháng 4 năm 2024

Giảng viên ra đề

Lê Văn Vĩnh