TRƯỜNG ĐẠI HỌC VĂN LANG
KHOA CNTT

ĐỀ THI HỌC PHẦN ĐSTT
Học kỳ 1 Năm học 2023-2024

I. Thông tin chung

Học phần: Đại số tuyến tính và ứng dụng. **Số tín chỉ: …3……….**

Mã học phần: 71MATL10053 **Mã nhóm lớp học phần 231_71MATL10053_01,2,3,7,8**

Thời gian làm bài: 75 phút **Hình thức thi: Tự luận.**

SV được tham khảo tài liệu: **Có** ☒ **Không** ☐

Giảng viên nộp đề thi, đáp án **Lần 1** ☒ **Lần 2** ☒

II. Các yêu cầu của đề thi nhằm đáp ứng CLO

(phần này phải phối hợp với thông tin từ đề cương chi tiết của học phần)

Ký hiệu CLO	**Nội dung CLO**	**Hình thức đánh giá**	**Trọng số CLO trong thành phần đánh giá (%)**	**Câu hỏi thi số**	**Điểm số tối đa**	**Lấy dữ liệu đo lường mức đạt PLO/PI**
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**	**(7)**
CLO 1	Tìm ma trận	cho điểm	20%	1	2,0	20%
CLO 2	**Tọa độ ma trận chuyển cơ sở**	Cho điểm	20%	2	2,0	20%
CLO 3	**Giải hệ phương trình tuyến tính**	Cho điểm	20%	3	2,0	20%
CLO4	Chéo hóa ma trận	Cho điểm	20%	4	2,0	20%
CLO 5	Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc	Cho điểm	20%	5	2,0	20%

III. Đề thi và đáp án.

Câu 1: (2 điểm).

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .Tìm ma trận B sao cho AB = BA

Đáp án và thang điểm.

Stt	**Nội dung**	**Thang điểm**
1	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix};$ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a-b \\ y & x-y \end{bmatrix}$	1,0
2	$AB = BA \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ a-x & b-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a-b \\ y & x-y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = a-b \\ a-x = y \\ b-y = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b \\ y = a-b \end{cases};$	0,5
3	$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, Vi..du : B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	0,5

Câu 2.(2 điểm) . Trong $\mathbb{R}^2$, xét hai cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1,0); u_2 = (0,-1)\}$$
$$B_2 = \{v_1 = (2,-1); v_2 = (1,1)\}$$

Cho biết: $[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Tìm $[x]_{B_1}$

Đáp án và thang điểm.

<table>
<tr><th>Stt</th><th>Nội dung</th><th>Thang điểm</th></tr>
<tr><td>1</td><td>

$$P = \left(B_1 \to B_2\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_1$$

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

$Cach..1.$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$Cach..2.$

$$\left[P \mid I_2\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)d_2 \leftrightarrow d_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{d_2 := (-2)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{d_2 := \frac{1}{3}d_2}$$

$$\xrightarrow{d_2 := \frac{1}{3}d_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := d_2 + d_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow P^{-1}\left(B_2 \to B_1\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

</td><td>1.0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

$$Ta..co:[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}..Tim:[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x \end{bmatrix}.$$

$$[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x \end{bmatrix} = P^{-1}.[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow [x]_{B_1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

</td><td>0.5</td></tr>
</table>

Câu 3: (2 điểm). Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = -1 \end{cases}$$

Đáp án và thang điểm.

Stt	Nội dung	Thang điểm
1	$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[d_3 := (-2)d_1 + d_3]{d_2 := (-1)d_1 + d_2} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \end{array}\right]$ $\xrightarrow{d_3 := (-1)d_2 + d_3} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{d_1 := (-2)d_2 + d_1} \left[\begin{array}{cccc\|c} 1 & 0 & -7 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	1.0
2	$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 7x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 7x_3 - 13x_4 - 7 \\ x_2 = -2x_3 + 4x_4 + 3 \end{cases}$	0.5
3	$\Leftrightarrow (x_1 = 7x_3 - 13x_4 - 7; x_2 = -2x_3 + 4x_4 + 3; x_3; x_4)$	0 .5

Câu 4: (2 điểm). Chéo hóa ma trận sau: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Đáp án và thang điểm.

Stt	Nội dung	Thang điểm
1	$\det\left(A-\lambda I_3\right)=0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix}1-\lambda & 3 & 3\\ -3 & -5-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 3\\ -3 & -5-\lambda & -3\\ 3 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$ $\xrightarrow{d_3:=d_2+d_3}\begin{vmatrix}1-\lambda & 3 & 3\\ -3 & -5-\lambda & -3\\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda)(-2-\lambda)+(-9)(-2-\lambda)-\left[(-9)(-2-\lambda)+(-3)(1-\lambda)(-2-\lambda)\right]=0$ $\Leftrightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)(-5-\lambda+3)=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda)(-2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=1; \lambda=-2$	1.0
2	$+\lambda=-2$ $\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -3 & -3 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=0.$ Co..s*o..cua..khong..gian..rieng..E*(1)..*la* : (0;1;−1) & (1;0;−1)	0.25
3	$+\lambda=1.$ $\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ -3 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_2+3x_3=0\\ -3x_1-6x_2-3x_3=0\\ 3x_1+3x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3=0\\ x_1+x_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_3=-x_2\\ x_1=-x_2\end{cases}$ Co..s*o..cua..khong..gian..rieng..E*(2)..*la* : (−1;1;−1)	0.25
4	**Ma trận C làm chéo hóa ma trận A là:** $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}$ **Dạng chéo hóa của ma trận A là:**	0.5

	$C^{-1}AC=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$	

Câu 5. (2 điểm). Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$\varphi(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

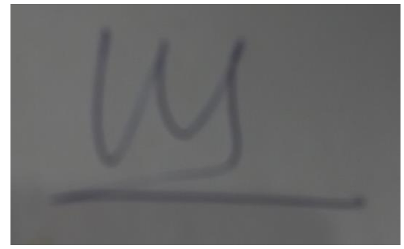
Đáp án và thang điểm.

Stt	Nội dung	Thang điểm
1	$\varphi(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ $\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_1)^2-4x_1x_2+x_2^2-x_1^2+2x_1x_3-x_3^2+x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+x_2^2+2x_3^2$	0.75
2	$\varphi(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2)^2-(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2+x_2^2+2x_3^2$ $Dat:$ $y_1=2x_1-x_2;$ $y_2=x_1-x_3;$ $y_3=x_2-x_3;$ $y_4=x_2;$ $y_5=x_3$	0.75
3	$\Rightarrow Dang..chinh..tac:$ $\varphi(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=y_1^2-y_2^2+y_3^2+y_4^2+2y_5^2$	0.5

Hết

TP. Hồ Chí Minh, ngày 12. tháng 11. năm 2023.

GIẢNG VIÊN RA ĐỀ



PGS.TS.Nguyễn Văn Lộc.